Math93.com

Baccalauréat 2025 - Spécialité Maths
Correction Métropole

Sujet 1 - 17 juin 2025

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

BAC 2025

Tous les sujets et corrigés de 2025 sont disponibles ici : www.math93.com

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

BARÈME (sur 20 points)			
Exercice 1	:	Probabilités	5 points
Exercice 2	:	Fonction, intégration	6 points
Exercice 3	:	QCM Espace	4 points
Exercice 4	:	Suites, Algo, équation différentielle	5 points

Exercice 1. Probabilités 5 points

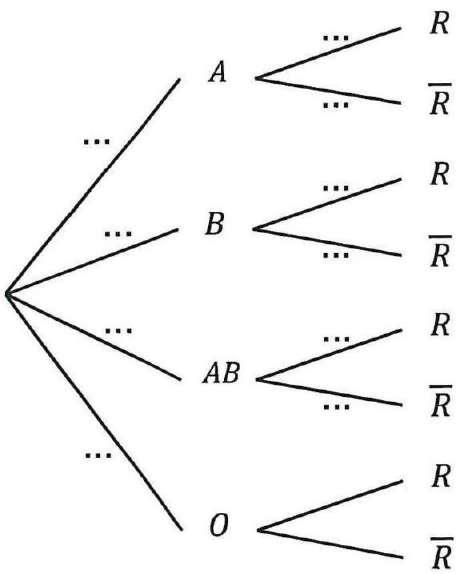
On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.
Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.
Au sein de la population française, on sait que :

- 45% des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85% sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3% des individus appartiennent au groupe AB , et parmi eux 82% sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.
On désigne par :

- A l'évènement «La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement «La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement «La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement «La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement «La personne choisie a un facteur rhésus positif».

Pour un événement quelconque E, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

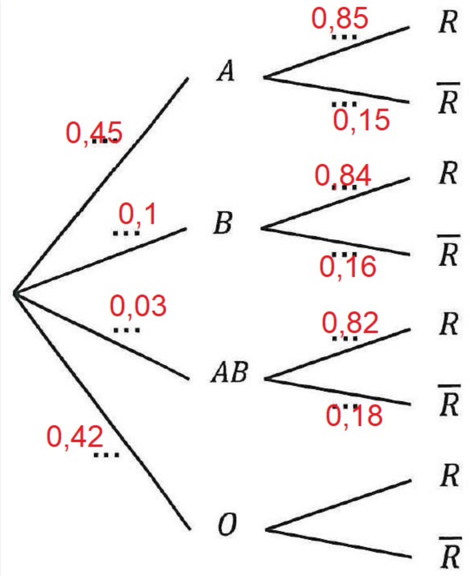


1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

Corrigé

Nous complétons l'arbre à deux étages. Les probabilités sont :

- $P(A) = 0{,}45$ et $P_A(R) = 0{,}85$ donc $P_A(\overline{R}) = 0{,}15$;
- $P(B) = 0{,}10$ et $P_B(R) = 0{,}84$ donc $P_B(\overline{R}) = 0{,}16$;
- $P(AB) = 0{,}03$ et $P_{AB}(R) = 0{,}82$ donc $P_{AB}(\overline{R}) = 0{,}18$;
- $P(O) = 1 - (0{,}45 + 0{,}10 + 0{,}03) = 0{,}42$.



2. Montrer que $P(B \cap R) = 0{,}084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

On applique la formule : $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0{,}10 \times 0{,}84 = 0{,}084$.

Interprétation : Cela signifie que 8,4% de la population française appartient au groupe sanguin B et a un rhésus positif.

3. On précise que $P(R) = 0{,}8397$. Montrer que $P_O(R) = 0{,}83$.

Corrigé

On utilise la formule des probabilités totales. Les événements A, B, AB, O forment une partition de l'univers.

On a :

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(A) \cdot P_A(R) + P(B) \cdot P_B(R) + P(AB) \cdot P_{AB}(R) + P(O) \cdot P_O(R) \\
0{,}8397 &= 0{,}45 \times 0{,}85 + 0{,}10 \times 0{,}84 + 0{,}03 \times 0{,}82 + 0{,}42 \times P_O(R) \\
0{,}8397 &= 0{,}3825 + 0{,}084 + 0{,}0246 + 0{,}42 \times P_O(R) \\
0{,}8397 &= 0{,}4911 + 0{,}42 \times P_O(R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0{,}8397 - 0{,}4911 &= 0{,}42 \times P_O(R) \\
0{,}3486 &= 0{,}42 \times P_O(R)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_O(R) = \frac{0{,}3486}{0{,}42} = 0{,}83}$$

4. On dit qu'un individu est «donneur universel» lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de $0{,}0714$.

Corrigé

Un donneur universel est de groupe O et de rhésus négatif, soit l'événement $O \cap \overline{R}$.

$$P(O \cap \overline{R}) = P(O) \times P_O(\overline{R}) = 0{,}42 \times (1 - 0{,}83) = 0{,}42 \times 0{,}17 = \underline{0{,}0714}$$

5. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels.

5. a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Corrigé

On effectue 100 tirages indépendants avec remise, et la probabilité de succès (être donneur universel) est constante : $p = 0{,}0714$. Il y a donc répétition de $n = 100$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0,0714$.
La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.

Soit

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n = 100,\ p = 0{,}0714)}$$

5. b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels.

Corrigé

On cherche $P(X \leqslant 7)$ avec $X \sim \mathcal{B}(100;\ 0{,}0714)$.
Avec la calculatrice : on obtient $P(X \leqslant 7) \approx \underline{0{,}577}$ à 10^{-3} près.

5. c. Montrer que l'espérance $E(X)$ est à 7,14 et la variance $V(X)$ est à 6,63 à 10^{-2} près.

Corrigé

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on a :

- $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}0714 = \boxed{7{,}14}$
- $V(X) = n \times p \times (1 - p) = 100 \times 0{,}0714 \times 0{,}9286 \approx \boxed{6{,}63}$

6. On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$.

6. a. Que représente M_N ?

Corrigé

La variable M_N est la moyenne du nombre de donneurs universels dans N villes. Elle donne donc la **moyenne des $\boldsymbol{X_i}$** (nombre de donneurs universels parmi 100 personnes) sur les N villes tirées.

6. b. Calculer $E(M_N)$.

Corrigé

Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_N) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \frac{1}{N} \times N \times 7{,}14 = \boxed{7{,}14}$$

6. c. Montrer que $V(M_N) = \dfrac{6{,}63}{N}$.

Corrigé

Les X_i étant indépendantes et de même variance :

$$V(M_N) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V(X_i) = \frac{1}{N^2} \times N \times 6{,}63 = \boxed{\frac{6{,}63}{N}}$$

6. d. Déterminer la plus petite valeur de N telle que :

$$P\left(7 < M_N < 7{,}28\right) \geqslant 0{,}95$$

Corrigé

Propriété 1 (Inégalité de Bienaymé-Tchébychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$\boxed{P\Big(|X - E(X)| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2}} \iff \boxed{\mathrm{P}\Big|X - E(X)| < \alpha\Big) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{V}(X)}{\alpha^2}}$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|M_N - E(M_N)| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{V(M_N)}{\varepsilon^2}$$

Ici : $E(M_N) = 7{,}14$; on cherche $P\left(|M_N - 7{,}14| < 0{,}14\right) \geqslant 0{,}95$. Donc :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{6{,}63/N}{(0{,}14)^2} \geqslant 0{,}95 &\iff 1 - \frac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2} \geqslant 0{,}95 \\
&\iff -\frac{6{,}63}{N \times 0,0196} \geqslant -0{,}05 \\
&\iff \frac{6{,}63}{N \times 0,0196} \leqslant 0{,}05
\end{aligned}$$

On compose par la foncion inverse strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{N \times 0,0196}{6{,}63} \geqslant \frac{1}{0{,}05} \\
&\iff N \geqslant \frac{6,63}{0{,}05 \times 0,0196} \approx 6765,3
\end{aligned}$$

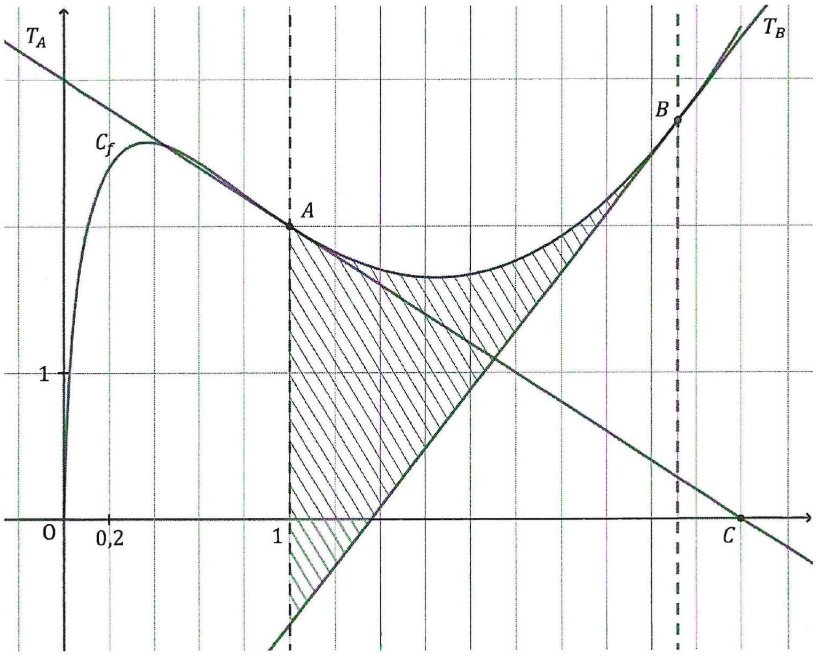
Donc la plus petite valeur entière vérifiant cette condition est : $\boxed{N = 6766}$

Exercice 2. Fonction, intégration — 6 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty\,[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée C_f, sur l'intervalle $]0;3\,]$;
- la droite T_A, tangente à C_f au point $A(1;2)$;
- la droite T_B, tangente à C_f au point $B(\mathrm{e};\mathrm{e})$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3;0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

Corrigé

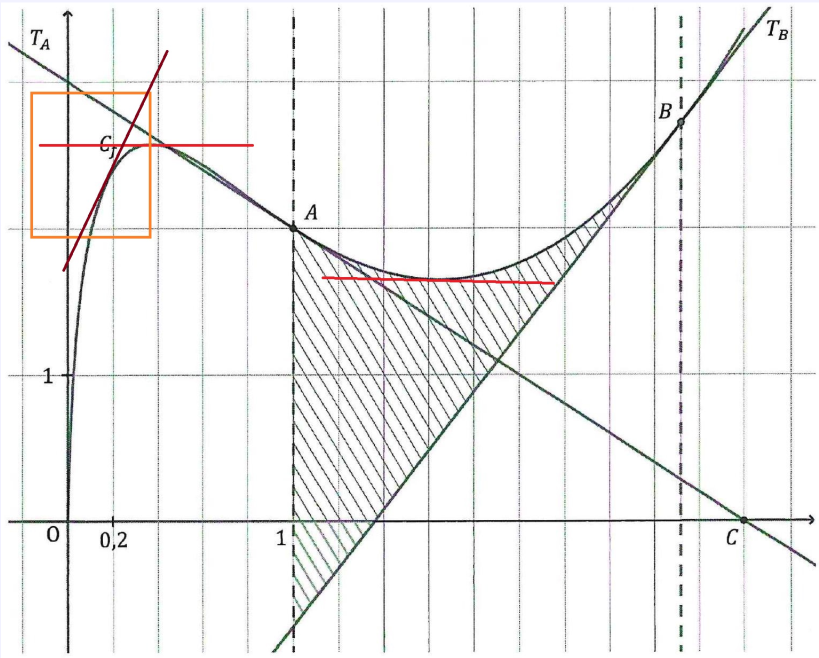
Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_A au point $A(1\ ;\ 2)$.
Cette tangente passe aussi par le point $C(3\ ;\ 0)$.
On applique la formule du coefficient directeur :

$$m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{0-2}{3-1}=-1$$

Donc : $\boxed{f'(1)=-1}$

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\ ;\ 3]$?

Corrigé



Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points où la tangente est horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses.

On observe deux points où la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale : un sommet au point de la courbe d'abscisse autour de $x \approx 0,3$ et un autre autour de $x \approx 1,6$

Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions dans l'intervalle $]0\ ;\ 3]$.

3. Quel est le signe de $f''(0{,}2)$?

Corrigé

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est *convexe* (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est *au-dessus* (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est *convexe* (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est *croissante* (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est *convexe* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles .
f est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles .

On observe que sur un voisinage de $x = 0{,}2$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est concave car au dessous de sa tangente.

Cela signifie que $\boxed{f''(0{,}2) < 0}$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

Corrigé

- On résout l'équation :

$$2X^2 - 3X + 2 = 0$$

C'est une équation du second degré avec $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$$

Donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

- Les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
Puisque $x \in]0~;~+\infty[$ on a $x \neq 0$ et donc :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in]0~;~+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = 0 \\ x \in]0~;~+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0 \\ x \in]0~;~+\infty[\end{cases}$$

- Or par changement de variable.

$$\begin{cases} 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0 \\ x \in]0~;~+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} X = \ln x \quad , (x \in]0~;~+\infty[) \\ 2X^2 - 3X + 2 = 0 = 0 \end{cases}$$

Puisque l'équation du second degré en X n'admet pas de solutions réelles cette équation n'admet pas de solution.
De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

Corrigé

On a pour $x > 0$:

$$f(x) = x \cdot \left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = x\ln^2 x\left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x}\right)$$

On étudie la limite en $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\ln x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\ln x} \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x}\right) = 2$$

Et par produit :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{3}{\ln x} + \dfrac{2}{\ln^2 x}\right) = 2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

©ISSN 2272-5318

3. On admet que :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$$

3. a. Montrer que :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$$

Corrigé

On admet que pour $x > 0$ on a :

$$f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$$

La fonction f' est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ avec :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{4\ln x + 1}{x} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)}$

3. b. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Corrigé

On étudie le signe de $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

- Le facteur $\frac{1}{x}$ est strictement positif sur $]0\,;\,+\infty[$;
- Donc f'' est du signe du facteur $(4\ln x + 1)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{cases} \ln x + \frac{1}{4} = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1/4} \\ \ln x + \frac{1}{4} > 0 \iff x > \mathrm{e}^{-1/4} \end{cases} \implies \ln x + \frac{1}{4} < 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}^{-1/4}$$

- Si $0 < x < \mathrm{e}^{-1/4}$, alors $f''(x) < 0$: f est concave ;
- Si $x > \mathrm{e}^{-1/4}$, alors $f''(x) > 0$: f est convexe.

Il y a donc un point d'inflexion d'abscisse en $\boxed{x = \mathrm{e}^{-1/4}}$ car la dérivée seconde s'y annule en changeant de signe (changement de convexité).

3. c. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur $[1\,;\,+\infty[$.

Corrigé

On sait que :

- f est convexe sur $[\mathrm{e}^{-1/4}\,;\,+\infty[$;
- Le point $B(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e})$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et $\mathrm{e} \in [\mathrm{e}^{-1/4}\,;\,+\infty[$;
- La tangente T_B est donc la tangente en un point où f est convexe donc où la courbe est au-dessus de ses tangentes.
- Par ailleurs $[1\,;\,+\infty[\subset [\mathrm{e}^{-1/4}\,;\,+\infty[$ car $\mathrm{e}^{-1/4} < \mathrm{e}^{1}$.

$$\boxed{\text{Sur } [1\,;\,+\infty[,\quad \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de la tangente } T_B}.$$

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.

Corrigé

On cherche l'équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e})$.
On rappelle que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Donc :

$$f'(\mathrm{e}) = 2(1)^2 + 1 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

La tangente en $x = \mathrm{e}$ a donc pour coefficient directeur 2, et elle passe par le point $B(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e})$. L'équation de la tangente est donc :

$$y = 2(x - \mathrm{e}) + \mathrm{e} = 2x - 2\mathrm{e} + \mathrm{e} = 2x - \mathrm{e}$$

Donc : $\boxed{T_B : y = 2x - \mathrm{e}}$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, dx = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$$

Corrigé

Théorème 1 (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On dit dans ce cas que les fonction **u et v sont « de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$ »**.
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b u'v = \left[\ uv\ \right]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Méthode

La méthode dans ce genre d'exercice est de bien identifier les fonction u et v. Généralement, l'une des 2 admet une primitive simple, on prendra u', et l'autre a une dérivée plus simple, on posera v.

On cherche à calculer :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln(x)\, \mathrm{d}x$$

On pose :

$$\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ (u et v sont « de classe C^1 sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ ») donc en appliquant le théorème d'intégration par partie :

$$\int_1^{\mathrm{e}} u'v = \left[\ uv\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} uv'$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^{e} x\ln x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{x}{2}\,dx\\
&= \left(\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{e}\\
&= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}
\end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré entre $\mathcal{C}_f$, T_B et les droites $x = 1$ et $x = e$. On admet :

$$\int_1^{e} x(\ln x)^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$$

Corrigé

- On a montré que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B d'équation $y = 2x - e$ sur $[1\,;\,+\infty[$.
- On cherche donc à calculer :

$$\mathcal{A} = \int_1^{e}\left(f(x) - (2x - e)\right)dx$$

Or $f(x) = x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right)$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^{e}\left[x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) - 2x + e\right]dx\\
&= \int_1^{e}\left[2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 2x - 2x + e\right]dx\\
&= \int_1^{e}\left[2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + e\right]dx
\end{aligned}$$

On décompose alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 2\int_1^{e} x(\ln x)^2 dx - 3\int_1^{e} x\ln x dx + \int_1^{e} e\ dx\\
&= 2\cdot\frac{e^2-1}{4} - 3\cdot\frac{e^2+1}{4} + e(e-1)\\
&= \frac{2(e^2-1) - 3(e^2+1)}{4} + e(e-1)\\
&= \frac{2e^2 - 2 - 3e^2 - 3}{4} + e^2 - e\\
&= \frac{-e^2-5}{4} + e^2 - e\\
&= \left(\frac{3e^2}{4} - e - \frac{5}{4}\right)
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{3e^2}{4} - e - \frac{5}{4}}$ unité d'aire.

Exercice 3. QCM Espace — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Corrigé

Une représentation paramétrique de la droite (AB) s'obtient à partir d'un point de la droite (par exemple A) et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

On calcule :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-0 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Une représentation correcte est donc en utilisant le point $B(3; 2; -1)$ et ce vecteur directeur :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 6t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

La forme proposée dans l'affirmation correspond à :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est-il colinéaire à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$?

On vérifie que $\vec{u} = -\dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ donc c'est un vecteur directeur de la droite.

Conclusion : $\boxed{\text{Affirmation 1 est vraie.}}$

©ISSN 2272-5318

Affirmation 2 : Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

Corrigé

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (OAB) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Prenons :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OA} &= 5 \times (-1) + (-2) \times 0 + 1 \times 5 = -5 + 0 + 5 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OB} &= 5 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ donc **pas normal** au plan (OAB).

Conclusion : $\boxed{\text{Affirmation 2 est fausse.}}$

©ISSN 2272-5318

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$;
- la droite d' de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

Corrigé

- Pour montrer que deux droites ne sont pas coplanaires, on peut supposer qu'elles sont sécantes ou parallèles ? si ce n'est pas le cas, elles sont non coplanaires.
- Soient :
  - $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de d et $\overrightarrow{u_{d'}}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de d'

  Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires (on vérifie qu'il n'existe pas λ tel que $\overrightarrow{u_{d'}} = \lambda \cdot \overrightarrow{u_d}$).

  $$\frac{4}{1} \neq \frac{4}{-1}$$

- On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \\ x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 23 = 3 + 8s & : \ (L1 + L2) \\ -36 = -1 - 14s & : \ (L3 - 2L1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 4s - 15 = -4 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 15 + k = 11 \\ y = 8 - k = 12 \\ z = -6 + 2k = -14 \end{cases}$$

- **Conclusion** : Les deux droites sont donc sécantes au point de coordonnées $(11\ ;\ 12\ ;\ -14)$ et par conséquent coplanaires. Affirmation 3 fausse

©ISSN 2272-5318

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2; -1; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est $2\sqrt{3}$.

Corrigé

- Méthode 1 :
  - Un vecteur normal au plan P est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
  - La droite perpendiculaire à P passant par le point C a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x = 2 + k\\ y = -1 - k\\ z = 2 + k\end{cases}$
  - On cherche donc le point d'intersection de cette droite et du plan :

$$\begin{cases}x = 2 + k\\ y = -1 - k\\ z = 2 + k\\ x - y - +z + 1 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x = 2 - k\\ y = -1 - k\\ z = 2 + k\\ 2 + k + 1 + k + 2 + k + 1 = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x = 2 + k\\ y = -1 - k\\ z = 2 + k\\ 3k = -6\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}k = -2\\ x = 0\\ y = 1\\ z = 0\end{cases}$$

  - On obtient alors le point $H(0; 1; 0)$ projeté orthogonal de C sur le plan.
  - Et donc :

$$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{CH = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$$

- Méthode 2 : avec la formule (pas explicitement au programme)

La distance d'un point $C(x_0, y_0, z_0)$ à un plan $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule :

$$\text{dist}(C, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ici :

- $a = 1, b = -1, c = 1, d = 1$
- $C(2; -1; 2)$

Calcul du numérateur :

$$|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1| = |2 + 1 + 2 + 1| = |6| = 6$$

Calcul du dénominateur :

$$\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Donc :

$$\text{dist}(C, \mathcal{P}) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Affirmation 4 est vraie.}}$

La suite de la correction est en cours de réalisation

Exercice 4. Suites, Algo, équation différentielle — 5 points

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0=1$.
Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=-0,02u_n^2+1,3u_n$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0;20]$ par $h(x)=-0,02x^2+1,3x$.

On admet que h est croissante sur $[\,0;20\,]$.
a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.
b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
c. Justifier que $\mathrm{L}=15$.
3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n=0
    u=1
    while
        n=
        u=
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.
Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[\,0;+\infty\,[$ vérifiant :

- $f(0)=1$;
- f ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$;
- f est dérivable sur $[\,0;+\infty\,[$;
- f est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_1) : $y'=0,02y(15-y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $g(t)=\frac{1}{f(t)}$.

Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E_2) : $y'=-0,3y+0,02$.
2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. En déduire que pour tout $t\in[0;+\infty[$:

$$f(t)=\frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1}$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[\,0;+\infty\,[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Fin du devoir