Corrigé du Baccalauréat Amérique du Nord – 21 mai 2026

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 — 4 points

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.
II a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

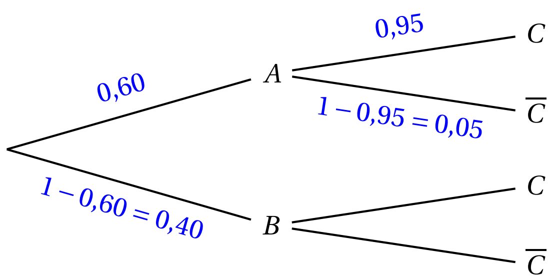
On choisit au hasard une tomate dans le stock.
On désigne par :

- A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. On complète l'arbre ci-dessous.



2. **a.** La probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A est $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}60 \times 0{,}95 = 0{,}57$.

b. On cherche $P_B(C)$. D'après le texte : $P(C) = 0{,}91$.
D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$ donc $P(C) = P(A \cap C) + P(B) \times P_B(C)$.
Donc : $0{,}91 = 0{,}57 + 0{,}40 \times P_B(C)$, soit $0{,}34 = 0{,}40 \times P_B(C)$, et donc : $P_B(C) = \dfrac{0{,}34}{0{,}40} = 0{,}85$.

c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.
Il faut donc comparer $P_{\overline{C}}(A)$ et $P_{\overline{C}}(B)$.

$$P_{\overline{C}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0{,}60 \times 0{,}05}{1 - 0{,}91} = \frac{0{,}03}{0{,}09} = \frac{1}{3}$$

$$P_{\overline{C}}(B) = \frac{P\left(B \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0{,}40 \times (1 - 0{,}85)}{0{,}09} = \frac{0{,}06}{0{,}09} = \frac{2}{3}$$

$P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{1}{2} \times P_{\overline{C}}(B)$ donc le responsable commercial a raison.

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale ; ses paramètres sont $n = 15$ et $p = 0,09$.

b. La probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables est :
$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1 - 0,09)^{15-2}$ qui a pour arrondi au millième 0,250.

c. La probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables est :
$P(X \leqslant 2) \approx 0,853$ (à la calculatrice).

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n, la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n, suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

a.
- Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,09n$.
  On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,
  donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \dfrac{1}{n}E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,09n = 0,09$.
- Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09, alors la variance de X_n est, par propriété : $V(X_n) = np(1-p) = 0,09 \times (1 - 0,09) \times n = 0,0819n$.
  D'après la formule : $V(aX) = a^2V(X)$, on a : $V(F_n) = V\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = V\left(\dfrac{1}{n}X_n\right) = \dfrac{V(X_n)}{n^2}$.
  Donc $V(F_n) = \dfrac{V(X_n)}{n^2} = \dfrac{0,0819n}{n^2} = \dfrac{0,0819}{n}$.

b. On veut démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geqslant 1 - \dfrac{32,76}{n}$.

$0,04 < F_n < 0,14 \iff 0,09 - 0,05 < F_n < 0,09 + 0,05 \iff -0,05 < F_n - 0,09 < 0,05$
$\iff |F_n - 0,09| < 0,05$

donc $P(0,04 < F_n < 0,14) = P(|F_n - 0,09| < 0,05) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geqslant 0,05)$

La variable aléatoire F_n a pour espérance $E(F_n)$ et pour variance $V(F_n)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in \left]0 ; +\infty\right[$, $P\left(\left|F_n - E(F_n)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(F_n)}{\delta^2}$.

$E(F_n) = 0,09$ et $V(F_n) = \dfrac{0,0819}{n}$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

pour tout $\delta \in \left]0 ; +\infty\right[$, $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{\frac{0,0819}{n}}{\delta^2}$.

Pour $\delta = 0,05$, l'inégalité : $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{\frac{0,0819}{n}}{0,05^2}$, soit $P\left(\left|F_n - 0,09\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{32,76}{n}$

$P(0,04 < F_n < 0,14) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geqslant 0,05)$

$P\left(\left|F_n - 0{,}09\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \dfrac{32{,}76}{n}$ donc $-P\left(\left|F_n - 0{,}09\right| \geqslant 0{,}05\right) \geqslant -\dfrac{32{,}76}{n}$

donc $1 - P\left(\left|F_n - 0{,}09\right| \geqslant 0{,}05\right) \geqslant 1 - \dfrac{32{,}76}{n}$ et donc $P\left(0{,}04 < F_n < 0{,}14\right) \geqslant 1 - \dfrac{32{,}76}{n}$

c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.

Pour $n = 500$:

- La fréquence de tomates non commercialisables est $F = \dfrac{55}{500} = 0{,}11$; on remarque que $0{,}04 \leqslant F \leqslant 0{,}14$
- $1 - \dfrac{32{,}76}{n} = 1 - \dfrac{32{,}76}{500} = 0{,}934\,48$

On a donc $P\left(0{,}04 \leqslant F_{500} \leqslant 0{,}14\right) \geqslant 0{,}934\,48$.

Il y a donc une probabilité supérieure à 93,448 % que la fréquence de tomates non commercialisables soit comprise entre 0,04 et 0,14.

Comme 0,11 est compris entre 0,04 et 0,14, le résultat est conforme à ce qu'attendait le responsable.

EXERCICE 2 — 6 points

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. On résout l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \iff x\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0 \iff x\left(\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

Soit $x = 0$, soit $\dfrac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

$$\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff 2 - \sqrt{1+x^2} = 0 \iff 2 = \sqrt{1+x^2} \iff 4 = 1 + x^2 \iff 3 = x^2$$
$$\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

L'équation $f(x) = x$ a pour ensemble solution $S = \left\{-\sqrt{3}\,;\,0\,;\,\sqrt{3}\right\}$.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$, soit $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2+2x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

b. Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On veut démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$ est vraie.

- **Initialisation**
$u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{2\times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$
Donc la propriété $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \sqrt{3}$ est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f\left(\sqrt{3}\right)$
$f(1) = \sqrt{2} > 1$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et
$f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$
Donc on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \sqrt{3}$, et donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2.
- Pour tout n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a : $u_n < \sqrt{3}$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente.

On appelle ℓ la limite de (u_n). Comme pour tout n, $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$, on a : $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue ; on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.
- La limite d'une suite est unique, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

On en déduit que $\ell = f(\ell)$ et donc que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

La seule solution vérifiant $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$ est $\sqrt{3}$ (voir **A.1**), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a.
- $u_0 = 1$ donc $v_0 = \dfrac{u_0^2}{3-u_0^2} = \dfrac{1^2}{3-1^2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$
- $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \dfrac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \dfrac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{3\left(1+u_n^2\right)-4u_n^2}{1+u_n^2}}$
$= \dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2} \times \dfrac{1+u_n^2}{3+3u_n^2-4u_n^2} = \dfrac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4\times\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 4$.

b.
- La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 4$ donc, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}5 \times 4^n$.
On en déduit que, pour tout n, $v_n > 0$.
- $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2} \iff v_n\left(3-u_n^2\right) = u_n^2 \iff 3v_n - v_n \times u_n^2 = u_n^2 \iff 3v_n = u_n^2\,(1+v_n)$
$\iff \dfrac{3v_n}{1+v_n} = u_n^2$

$v_n > 0$ donc $1 + v_n > 0$ donc $\dfrac{3v_n}{1+v_n} > 0$ et donc $\sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$ existe.

De plus on sait que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$ donc $u_n > 0$.

On a donc : $u_n = \sqrt{\dfrac{3v_n}{1+v_n}}$.

On en déduit que pour tout n, on a : $u_n = \sqrt{\dfrac{3 \times 0{,}5 \times 4^n}{1 + 0{,}5 \times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5 \times 4^n}{1 + 0{,}5 \times 4^n}}$

c. $u_n = \sqrt{\dfrac{1{,}5 \times 4^n}{1 + 0{,}5 \times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5 \times 4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n} + 0{,}5\right)}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5}{\frac{1}{4^n} + 0{,}5}}$

D'après les propriétés des suites géométriques, on sait que si $q > 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

$4>1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1{,}5}{\frac{1}{4^n} + 0{,}5} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$

Par continuité de la fonction racine carrée, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

1. On complète le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
    u = 1
    S = 0
    L = [ ]
    for i in range(p)
        S = S+u**2
        u = 2*u/sqrt(1+u**2)
        L.append(S)
    return L
```

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$. Donc : $1 \leqslant u_k^2 \leqslant 3$.

S_n est la somme de n termes compris entre 1 et 3 ; donc $n \times 1 \leqslant S_n \leqslant n \times 3$ donc $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. Calculs de limites

- $n \leqslant S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
- $n \leqslant S_n \leqslant 3n$ donc $\dfrac{n}{n^2} \leqslant \dfrac{S_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3n}{n^2}$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n^2} \leqslant \dfrac{3}{n}$.

  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$.

EXERCICE 3 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points A(4; 2; 2), B(5 ; −2 ; 3) et C(1; 1; 1);
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 1+\ \ t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z &=& 1+2t \end{array}\right.$$

- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. • Pour $t = 0$ on trouve :
$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\times 0 = 1 = x_C \\ y = 1+0 = 1 = y_C \\ z = 1+2\times 0 = 1 = z_C \end{array}\right.$
donc le point C appartient à la droite Δ.

• Le point A appartient à la droite Δ si et seulement si il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} x_A = 1+2t \\ y_A = 1+t \\ z_A = 1+2t \end{array}\right.$

c'est à dire si et seulement si le système $\left\{\begin{array}{l} 4 = 1+2t \\ 2 = 1+t \\ 2 = 1+2t \end{array}\right.$ admet une unique solution.

Or la première équation donne $t = \dfrac{3}{2}$ et la deuxième $t = 1$, ce système n'admet donc pas de solution d'où la droite Δ ne passe pas par le point A.

2. a. Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la droite Δ, un vecteur directeur de la droite Δ est donc un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

La représentation paramétrique de Δ nous donne $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc de la forme $2x + y + 2x + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus, le plan $\mathcal{P}$ passe par le point A donc :
$2x_A + y_A + z_A + d = 0 \iff 2\times 4+2+2\times 2+d = 0 \iff 8+2+4+d = 0 \iff d = -14$
Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc bien : $2x + y + 2z - 14 = 0$.

b. Un point appartient à un plan si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de ce plan.
$2x_B + y_B + z_B - 14 = 2\times 5 - 2 + 2\times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$
donc le point B appartient au plan $\mathcal{P}$.
$2x_C + y_C + z_C - 14 = 2\times 1 + 1 + 2\times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9 \neq 0$
donc le point C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

3. a. Le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si le point D appartient au plan $\mathcal{P}$ et si la droite (DC) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

On a $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et on sait que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ et $\vec{n}$ sont égaux donc la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

De plus : $2x_D + y_D + z_D - 14 = 2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$
donc le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.
Donc le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

b. Par définition du point A, il appartient au plan $\mathscr{P}$.
D'après la question 2.b., le point B appartient au plan $\mathscr{P}$
D est le projeté du point C sur le plan $\mathscr{P}$, donc il appartient au plan $\mathscr{P}$.
Les points A, B et D appartiennent donc tous les trois au plan $\mathscr{P}$ donc $\mathscr{P} = (ABD)$
or le point C n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$ d'après la question 2. b., donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
On est dans un repère orthonormé donc :
$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = 1 \times (-1) - 4 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$

d. Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}}$ est nul donc ABD est un triangle rectangle en A.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABD.

$$\begin{aligned}\text{On a } \mathscr{A} &= \frac{\text{AB} \times \text{BD}}{2} .\\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 4^2 + 1\text{\^{}}2} \times \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2 \times 9 \times 2}}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

Dans la pyramide ABCD, la hauteur associé à la base ABD sera le segment [CD] car le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan (ABD).

$$\begin{aligned}\text{D'où } V &= \frac{1}{3} \times 3 \times \text{CD}\\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\\ &= \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

Le volume de la pyramide ABCD est 3 unités de volume.

4. a. H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) si et seulement H appartient à la droite (BC) et les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires.

- On a $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}\frac{44}{29}\\-\frac{33}{29}\\\frac{22}{29}\end{pmatrix}$
d'où $\overrightarrow{\text{BH}} = -\frac{11}{29}\overrightarrow{\text{BC}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{BH}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont colinéaires
donc le point H appartient à la droite (BC).
- On a $\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix}-\frac{43}{29}\\-\frac{62}{29}\\-\frac{7}{29}\end{pmatrix}$
D'où $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = -\frac{43}{29} \times (-4) - \frac{62}{29} \times 3 - \frac{7}{29} \times 2 = 0$
Donc les droites (AH) et (BC) sont orthogonales.

Donc le point H $\left(\frac{73}{29}\ ;\ \frac{-4}{29}\ ;\ \frac{51}{29}\right)$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b. Le segment [AH] est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC. L'aire du triangle ABC est donc $\mathscr{A}' = \frac{\text{BC} \times \text{AH}}{2}$.

$\text{AH}^2 = \left(-\dfrac{43}{29}\right)^2 + \left(-\dfrac{62}{29}\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{29}\right)^2 = \dfrac{5742}{29^2} = \dfrac{198}{29}$

$\text{BC}^2 = (-4)^2 + 3^2 + (-2)^2 = 16 + 9 + 4 = 29$

D'où $\mathscr{A}' = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{198}{29}} \times \sqrt{29} = \dfrac{\sqrt{198}}{2} = \dfrac{\sqrt{22 \times 9}}{2} = \dfrac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. Soit h la distance du point D au plan (ABC).

h sera la hauteur associé à la base (ABC) dans la pyramide ABCD.

On a donc $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}' \times h$

D'où $3 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{22}}{2} \times h$ donc $h = \dfrac{3 \times 2}{\sqrt{22}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$

La distance du point D au plan (ABC) est donc égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

EXERCICE 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

1. On cherche la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = x\,(\ln x)^2 = x \times \ln(x) \times \ln(x)$.

$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x > 0, on pose $g(x) = x \ln x$.

a. Soit $x \in]0~;~+\infty[$,

$4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 4\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 4\left(\sqrt{x} \times \dfrac{1}{2}\ln(x)\right)^2 = 4 \times x \times \dfrac{1}{4}(\ln x)^2 = x\,(\ln x)^2 = f(x)$

On a bien : pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)$.

b. On cherche $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{X \to 0} X \ln X = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\displaystyle\lim_{x \to 0} g(\sqrt{x}) = 0$

D'où, par produit, $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

3. On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a. f est de la forme uv avec : $\forall x \in]0\,;+\infty[\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

On a alors : $\forall x \in]0\,;+\infty[\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x \end{cases}$

Or : $f' = u'v + v'u$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) &= 1 \times (\ln x)^2 + x \times \frac{2\ln x}{x} \\ &= \ln x \times \ln x + 2\ln x \\ &= (\ln x)(\ln x + 2) \end{aligned}$$

Donc sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.

b. On en déduit les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Étudions le signe de $f'(x)$:

$2+\ln(x)>0 \iff \ln x > -2 \iff x > \mathrm{e}^{-2}$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
signe de $\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\nearrow$	$f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. $f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=\mathrm{e}^{-2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)\right)^2=\mathrm{e}^{-2}\times(-2)^2=4\mathrm{e}^{-2}$

Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~1]$ est $4\mathrm{e}^{-2}$.

4. a. Sur l'intervalle $]0~;~1]$, le maximum est $4\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}54<2$ donc l'équation $f(x)=2$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$:

- f est continue car dérivable;
- f est strictement croissante;
- $f(1)=0<2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>2$

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

donc l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha\approx 2{,}46$ donc : $2{,}4<\alpha<2{,}5$.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$.

a. La fonction f est positive sur l'intervalle $[a\,;1]$ donc $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x=a$ et $x=1$, par l'axe des abscisses et la courbe.

b. $x\longmapsto x(\ln x)^2$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x)=x\\ v(x)=(\ln x)^2\end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x)=\dfrac{1}{2}x^2\\ v'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\ln(x)\end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a~;~1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a~;~1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^1-\int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\text{donc }\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times(\ln x)^2\right]_a^1-\int_a^1\frac{x^2}{2}\times\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1^2}{2}(\ln 1)^2-\frac{a^2}{2}(\ln a)^2-\int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{a^2}{2}(\ln a)^2-\int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat demandé.

c. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme $u'v$ avec $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $[a\ ;\ 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[a\ ;\ 1]$, donc , d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^1 - \int_a^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

donc
$$\begin{aligned}\int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{a^2}{2}\ln(a) - \int_a^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_a^1\\
&= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \left[\frac{1}{2}\times\frac{1^2}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}\right]\\
&= -\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{aligned}\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right)\\
&= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat demandé.

d. On cherche la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = -\frac{1}{2}(a\ln a)^2 + \frac{a}{2}\times a\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

Par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{a\to 0} a\ln a = 0$

donc : par produit $\displaystyle\lim_{a\to 0}(a\ln a)^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{a}{2}\times a\ln a = 0$.

De plus, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}$

donc, par somme, $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$