∽ Corrigé du Baccalauréat Asie – 10 juin 2026 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. **Variations :** La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x-2}{2x-3}$ est dérivable sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur étant non nul.

   On a : $f'(x) = \dfrac{1\times(2x-3)-(x-2)\times 2}{(2x-3)^2}$

   $= \dfrac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2}$

   $= \dfrac{1}{(2x-3)^2}$

   Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$, $(2x-3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

   La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$.

   Limites : Étudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

   - Limite en $-\infty$: $f(x) = \dfrac{x-2}{2x-3} = \dfrac{x(1-\frac{2}{x})}{x(2-\frac{3}{x})} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}}$

     Donc : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ (quotient de limites)

   - Limite en $\dfrac{3}{2}$, $x < \dfrac{3}{2}$: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} x-2 = -\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} 2x-3 = 0^-$

     Donc : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$ (quotient de limites)

   Conclusion : On a bien justifié le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$
signe de $f'(x)$	$+$	‖
variations de f	$\dfrac{1}{2} \nearrow +\infty$	‖

2. Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$, donc a fortiori sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction f est strictement croissante. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\Longrightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)\\ &\Longrightarrow \frac{-2}{-3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{-1}{-1}\\ &\Longrightarrow \frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1\end{aligned}$$

   Puisque $\dfrac{2}{3} \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.

Partie B

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \dfrac{2}{3}$.

  On a bien $\quad 0 \leqslant 0 \leqslant \dfrac{2}{3} \leqslant 1, \quad$ soit $\quad 0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

  La propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1/$

  La fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;1]$, elle conserve l'ordre, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \\ &\implies \frac{2}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1 \end{aligned}$$

  Comme $\quad 0 \leqslant \dfrac{2}{3}, \quad$ on obtient $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.

  L'encadrement est vrai au rang $n+1$.
- **Conclusion :** L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang supérieur ou égal à 0, il l'est aussi au rang suivant, par le principe de récurrence :

  Pour tout entier naturel n, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. Le résultat précédent montre :

- que $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc que la suite (u_n) est croissante et
- majorée par 1 puisque tous ses termes le sont.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite réelle ℓ vérifiant $\quad 0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La fonction f étant continue, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x-2}{2x-3} = x \\ &\iff x - 2 = x(2x-3) \\ &\iff x-2 = 2x^2 - 3x \\ &\iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ &\iff 2(x-1)^2 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \\ &\iff (x-1) = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $\ell = 1$ et donc que la suite (u_n) converge vers 1.

4. La fonction `seuil(0.0001)` renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n \geqslant 1 - 0{,}000\,1$, c'est-à-dire $u_n \geqslant 0{,}999\,9$.

La valeur 5 000 signifie que c'est à partir du rang $n = 5000$ que les termes de la suite dépassent 0,999 9.

5. **a.** Les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= \frac{2}{3} \\ u_2 &= \frac{\frac{2}{3} - 2}{2\left(\frac{2}{3}\right) - 3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{5} \\ u_3 &= \frac{\frac{4}{5} - 2}{2\left(\frac{4}{5}\right) - 3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

b. On peut conjecturer que $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

Démontrons-le par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$,
  $\dfrac{2(0)}{2(0)+1} = 0 = u_0$.
  La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$
  $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{\dfrac{2n}{2n+1} - 2}{2\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) - 3} = \dfrac{\dfrac{2n-2(2n+1)}{2n+1}}{\dfrac{4n-3(2n+1)}{2n+1}} = \dfrac{2n-4n-2}{4n-6n-3} = \dfrac{-2n-2}{-2n-3} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$
  La relation est vraie au rang $n+1$.
- On a donc montré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}$$

EXERCICE 2

Partie A

1. L'épreuve consiste en la répétition de $n = 16$ lancers-francs identiques et indépendants.
   Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli avec deux issues : succès (probabilité $p = 0.492$) ou échec.
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès.
   X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0{,}492$, notée $\mathscr{B}(16\,;0{,}492)$.
2. L'espérance est donnée par :
   $$\mathrm{E}(X) = n \times p = 16 \times 0{,}492 = 7{,}872$$
   En moyenne sur un grand nombre de matchs, le joueur réussira environ 7,872 lancers-francs par match.
3. Calcul de la probabilité d'avoir exactement 5 succès :
   $$P(X=5) = \binom{16}{5} \times (0{,}492)^5 \times (1-0{,}492)^{16-5} \approx 0{,}076$$
4. Probabilité de réussir au moins 6 lancers-francs :
   $$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}117 \qquad \text{soit} \qquad P(X \geqslant 6) \approx 0{,}883$$

Partie B

1. Le joueur effectue 3 lancers-francs. La variable Y peut donc prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$.
2. Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;p)$.
   $$\begin{aligned} P(Y=2) &= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 \\ &= 3p^2(1-p) \\ &= 3p^2 - 3p^3 \end{aligned}$$
3. Loi de probabilité de Y :

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

4. Calcul de $P(Y \geqslant 2)$:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 2) &= P(Y=2)+P(Y=3) \\ &= (3p^2-3p^3)+p^3 \\ &= -2p^3+3p^2 \end{aligned}$$

5. **a.** Étude de $f(x) = -2x^3+3x^2$ sur $[0\,;1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2+6x \\ &= 6x(1-x) \end{aligned}$$

Sur $[0\,;1]$, $6x \geqslant 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$.
Or

$$1-x>0 \iff 1>x.$$

On a donc pour $x \in [0\,;1[$, $f'(x)>0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$.

x	0	1
signe de $f'(x)$	$+$	0
variations de f	0 $\nearrow$	1

b. Sur l'intervalle $[0\,;1]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus, $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
Puisque $0{,}9 \in [0\,;1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0{,}9$ admet une unique solution α sur $[0\,;1]$.

c. À l'aide de la calculatrice :

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}80)=0{,}896 \\ f(0{,}81)=0{,}905 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0{,}80)<0{,}9<f(0{,}81)$$

L'encadrement est donc $0{,}80 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}81$.

d. La valeur α représente la probabilité de réussite minimale qu'un joueur doit avoir sur un lancer-franc pour que sa probabilité de réussir au moins 2 lancers sur 3 soit égale à 90 %.

EXERCICE 3

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\quad \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\quad \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

b. Calculons les produits scalaires :

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times(-2)+4\times1+1\times(-2) = -2+4-2 = 0$$
$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times1+4\times(-1)+1\times3 = 1-4+3 = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

c. Une équation du plan (ABC) est de la forme $x+4y+z+d=0$.

Le point A$(1\,;2\,;3)$ appartient au plan, donc :

$$1+4\times2+3+d=0 \iff 12+d=0 \iff d=-12$$

Une équation cartésienne est :

$$x+4y+z-12=0$$

2. a. La droite (d) est dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;4\,;1)$ et passe par D$(3\,;-2\,;-1)$.

Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+4t \\ z=-1+t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

b. Le point H appartient à (d), il existe donc $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_{\text{H}}=3+t \\ y_{\text{H}}=-2+4t \\ z_{\text{H}}=-1+t \end{cases}$.

De plus H appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan (ABC).

On en déduit que t est solution de :

$$\begin{aligned}(3+t)+4(-2+4t)+(-1+t)-12=0 &\iff 3+t-8+16t-1+t-12=0\\ &\iff 18t-18=0\\ &\iff t=1\end{aligned}$$

Les coordonnées de H sont donc $x_{\text{H}}=3+1=4$, $y_{\text{H}}=-2+4(1)=2$, $z_{\text{H}}=-1+1=0$.

Soit H$(4\,;2\,;0)$.

c. La distance de D au plan (ABC) correspond à la longueur DH :

$$\text{DH}=\sqrt{(4-3)^2+(2-(-2))^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

3. a. On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\text{AB}\times\text{AC}\times\cos(\widehat{\text{BAC}})$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2(1)+1(-1)-2(3)=-9$$
$$\text{AB}=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$
$$\text{AC}=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$$

D'où :

$$-9=3\times\sqrt{11}\times\cos(\widehat{\text{BAC}})$$
$$\cos(\widehat{\text{BAC}})=\frac{-9}{3\sqrt{11}}=\frac{-3}{\sqrt{11}}=\frac{-3\sqrt{11}}{11}$$

b. Sachant que $\cos^2(\widehat{\text{BAC}})+\sin^2(\widehat{\text{BAC}})=1$:

$$\begin{aligned}\sin^2(\widehat{\text{BAC}}) &= 1-\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2\\ &= 1-\frac{9}{11}=\frac{2}{11}\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{\text{BAC}}$ étant dans $[0\,;\pi]$, son sinus est positif : $\sin(\widehat{\text{BAC}})=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

c. L'aire du triangle ABC est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{1}{2}\times \text{AB}\times\text{AC}\times\sin(\widehat{\text{BAC}})\\ &= \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{11}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

4. Le volume du tétraèdre ABCD est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{\text{ABC}}\times\text{DH}\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{18}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1. **Affirmation 1 : Fausse.**
Calculons la dérivée seconde de $f(x) = (-0{,}5x+3)^5$. (on rappelle que $(u^n)' = nu^{n-1}u'$)

$$f'(x) = 5\times(-0{,}5)\times(-0{,}5x+3)^4 = -2.5(-0{,}5x+3)^4$$
$$f''(x) = -2{,}5\times 4\times(-0{,}5)\times(-0{,}5x+3)^3 = 5(-0{,}5x+3)^3$$

Pour $x = 10$, on a $f''(10) = 5(-5+3)^3 = 5(-8) = -40 < 0$.
La dérivée seconde n'est pas positive sur tout $\mathbb{R}$, la fonction n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

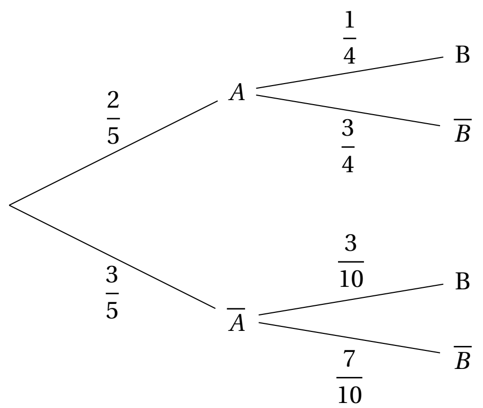
2. **Affirmation 2 : Vraie.**
Il y a 4 multiples de 8 parmi les 32 jetons $\{8, 16, 24, 32\}$. Le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est le nombre total de tirages moins le nombre de tirages ne contenant aucun multiple de 8 (tirage parmi les 28 autres jetons).

Nombre total de tirages : $\binom{32}{5} = 201\,376$

Nombre de tirages sans multiple de 8 : $\binom{28}{5} = 98\,280$

Nombre de tirages avec au moins un multiple de 8 : $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$

3. **Affirmation 3 : Fausse.** Complétons l'arbre fourni par l'énoncé.



On peut dans un premier temps calculer $P(B)$ par la formule de probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50}$$

On en déduit que :

$$p_B(\overline{A}) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{14}$$

4. **Affirmation 4 : Vraie.**
   Vérifions si $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ vérifie $h'(x) + h(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ h'(x) + h(x) &= \left(-\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\right) + \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \\ h'(x) + h(x) &= \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \end{aligned}$$

   La fonction h est bien une solution particulière.

5. **Affirmation 5 : Fausse.**
   Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière $h(x)$ et des solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$.
   Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $C\mathrm{e}^{-x}$.
   L'ensemble des solutions de (E) est donc constitué des fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$, ce qui est différent de l'expression proposée.