

Corrigé EDS 2023 Nouvelle Calédonie Jour 1

S. DIBOS

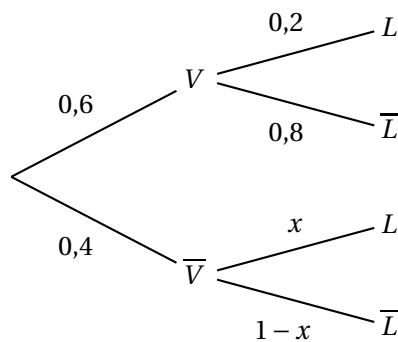
28 août 2023

Exercice 1

5 points

Partie A

1.



2. La probabilité qu'un client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est $P(V \cap \bar{L})$.

$$P(V \cap \bar{L}) = P(V) \times P_V(\bar{L}) = 0,6 \times 0,8 = \boxed{0,48}$$

3. Les événements V et \bar{V} forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(L) = P(V \cap L) + P(\bar{V} \cap L)$$

On a $P(V \cap L) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$.

Posons $P(\bar{V} \cap L) = p$. On a :

$$P(L) = 0,12 + p \iff 0,42 = 0,12 + p \iff p = 0,42 - 0,12 = \boxed{0,3}$$

On a donc bien $P(\bar{V} \cap L) = 0,3$.

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\bar{V}}(L) = \frac{P(\bar{V} \cap L)}{P(\bar{V})} = \frac{0,3}{0,4} = \boxed{\frac{3}{4} = 0,75}$$

5. La probabilité qu'un client ait choisi un voilier, sachant qu'il a pris l'option PILOTE est, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,12}{0,42} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0,29}$$

Partie B

1.

$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0,42 \times 0,005 = \boxed{0,0021}$$

$$P(\bar{L} \cap A) = P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(A) = (1 - 0,42) \times 0,12 = \boxed{0,0696}$$

2. Les événements L et \bar{L} forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(L \cap A) + P(\bar{L} \cap A) = 0,0021 + 0,0696 = 0,0717$$

La probabilité que le bateau loué par un client choisi au hasard subisse une avarie est donc 0,0717.

Puisque l'entreprise loue 1 000 bateaux, elle peut s'attendre à 72 avaries.

Partie C

1. Les paramètres de la loi binomiale suivie par X sont $\boxed{n = 40}$ et $\boxed{p = 0,42}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(X \geq 15)$:

$$\boxed{P(X \geq 15) \approx 0,768}$$

Exercice 2

5 points

1. a.

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 4 - 3 = 15 - 7 = \boxed{12}$$

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. a. Soit P_n la proposition $u_n \geq n + 1$.

Initialisation : $u_0 = 3$ et $0 + 1 = 1$.

$3 \geq 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geq n + 1 &\iff 5u_n \geq 5(n + 1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geq 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geq n + 2 = (n + 1) + 1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geq n + 1$.

b. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$. Puisque $u_n \geq n + 1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

3. a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n + 1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

c. $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

d. Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geq 5^n$.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} \geq 5^n &\iff 2 \times 5^{n+1} \geq 2 \times 5^n \\ &\iff 2 \times 5^{n+1} + (n + 1) + 1 \geq 2 \times 5^n + (n + 1) + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geq 2 \times 5^n + n + 2 \\ &\iff u_{n+1} \geq 2 \times 5^n + n + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geq u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. a.

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u= 5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

b.

u	n	u < 10 ⁷
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geq 10^7$.

Exercice 3**5 points**

1. On a $f(x) = (x+1)e^x = xe^x + e^x$. Donc les primitives de f sont de la forme $F(x) = xe^x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
Donc $F(x) = 1 + xe^x$ est une primitive de f .

Réponse a.

2. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1) et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2) .

On a $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$, donc \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Supposons qu'elles soient sécantes en un point A. Alors les coordonnées $(a; b; c)$ de A vérifient les deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} a = 2+r \\ b = 1+r \\ c = -r \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = 1-s \\ b = -1+s \\ c = 2-s \end{cases} .$$

On a donc $-r = 2-s \iff r = s-2$ et $2+r = 1-s \iff 2+s-2 = 1-s \iff 2s = 1 \iff s = \frac{1}{2}$.

Donc : $b = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $c = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Les deux droites sont sécantes en $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Réponse a.

3. Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$, donc \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux. Donc (P) et (Δ) sont parallèles.

S'il existe un point commun à (P) et (Δ) , alors (Δ) est incluse dans (P).

(Δ) passe par le point de coordonnées $(2; 4; 1)$. Or $2 \times 2 - 4 + 1 - 1 = 0$, donc ce point est un point du plan (P). La droite (Δ) est donc incluse dans le plan (P).

Réponse b.

4. Un vecteur normal à (P_1) est $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à (P_2) est $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$, donc \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont donc pas parallèles. Ils sont donc sécants.

De plus $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 2 - 2 \times 1 + 1 \times 1 = 1$, donc les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas orthogonaux. Les plans ne sont donc pas perpendiculaires.

Réponse c.

5. On sait que $\vec{EF} \cdot \vec{EG} = \|\vec{EF}\| \times \|\vec{EG}\| \times \cos(\vec{EF}, \vec{EG}) \iff \cos \alpha = \frac{\vec{EF} \cdot \vec{EG}}{\|\vec{EF}\| \times \|\vec{EG}\|}$

On a : $\vec{EF} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{EG} \begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\vec{EF} \cdot \vec{EG} = 1 \times (-3) + 2 \times 0 + 2 \times 4 = 5$

$$\|\vec{EF}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{EG}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Donc : $\cos \alpha = \frac{5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}$, soit $\alpha \approx 71^\circ$ d'après la calculatrice. **Réponse d.**

Exercice 4**5 points**

1. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)]$

$$\text{Par croissance comparée } \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (5x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{somme} \end{array} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = 0$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0}$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{2}{x} \right) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{somme} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{produit} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 2x + 2 - 2 \left[2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \right] = 10x + 2 - 2[2x \ln(x) + x] = 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x \\ &= \boxed{8x + 2 - 4x \ln(x)} \end{aligned}$$

3. a.

$$f''(x) = 8 - 4 \left[1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right] = 8 - 4 \ln(x) - 4 = 4 - 4 \ln(x) = \boxed{4[1 - \ln(x)]}$$

b. La courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.

$$f''(x) \geq 0 \iff 4[1 - \ln(x)] \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e \text{ (car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[).$$

La courbe \mathcal{C}_f est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0; e]$.

c.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	0	-
Variations de f'	2	$4e+2$	$-\infty$

$$f'(e) = 8e + 2 - 4e \ln(e) = 8e + 2 - 4e = 4e + 2$$

4. a. Sur $]0 ; e]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x \in]0 ; e]$, on a $f'(x) > 0$.

Sur $[e ; +\infty[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f'(e) = 4e + 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$. $0 \in]-\infty ; 4e + 2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[e ; +\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0 ; +\infty[$.

On a :

$$7,87 < \alpha < 7,88$$

- b. On sait que sur $]0 ; e]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[e ; +\infty[$ et qu'elle s'annule en α , $f'(x) \geq 0$ sur $[e ; \alpha]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[\alpha ; +\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0 ; \alpha]$ et négatif sur $[\alpha ; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0 \\
 &\iff 4\alpha \ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\
 &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha + 1)}{4\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \\
 &\iff \ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha) \\&= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} \\&= 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) \\&= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha \\&= \boxed{\alpha^2 + \alpha}\end{aligned}$$

6. D'après la question 4.a., on a :

$$\begin{aligned}7,87 < \alpha < 7,88 &\iff 61,936\ 9 < \alpha^2 < 62,094\ 4 \\&\iff 69,806\ 9 < \alpha^2 + \alpha < 69,974\ 4 \\&\iff \boxed{69,806\ 9 < f(\alpha) < 69,974\ 4}\end{aligned}$$